(続紙 1)

京都大学	博 士 (理 学)	氏名	崔　在裕
論文題目	Moduli spaces of framed symplectic and orthogonal bundles on P2 and the K-theoretic Nekrasov partition functions (複素射影平面上のシンプレクティック束及び直交束のモジュライ空間とK理論ネクラソフ分配関数)		

（論文内容の要旨）

K理論ネクラソフ分配関数は、4次元球面S4上の枠付きインスタントンのモジュライ空間の座標環のトーラス作用に関する指標と考えることができるが、このnaïveな捉え方のままでは well-defineであるのか、またどのように計算したらよいのか、自明ではない。A型のときには、二次元複素射影曲面P2上の枠付き torsion free 層のモジュライ空間の座標環と結びつけることにより、その問題が解消できることは、よく分かっていた。

Nekrasov-Shadchinは、ゲージ群が古典型のときに、インスタントンのADHM記述法を用いて、モジュライ空間をある条件を満たす行列の４つ組 (B1,B2,I,j) の空間の群作用による商空間 M と同定し、これを用いて分配関数を行列の空間上の積分で表す式を提唱した。この条件は、A型のときは、[B1,B2]+ij=0という代数方程式と、安定かつ余安定という開条件であり、古典型のときは、その変種である。しかし、空間 M に移って積分表示を適用するときには、安定性、余安定性条件を満たさない、もとのインスタントンには対応しない点も含めて考える必要があるために、積分表示式がインスタントンのモジュライ空間の座標環の指標を与えているのかどうかには、さらなる考察が必要である。A型のときには、これは空間 M の商を取る前のある種の行列の空間が、完全交叉であること、さらに M が正規であることの、二つの性質から、座標環の指標と積分表示式の一致が従う。この二つの性質は、より一般の箙多様体の場合に、Crawley-Boeveyによって示されていた。

本論文では、この問題をCrawley-Boeveryの結果が適用できない、別の古典群のときに考察して、シンプレクティック群 Sp(N/2) の場合には、この二つの性質が成り立つことを示し、特殊直交群 SO(N) のときには、インスタントン数が一番低いときに調べて、Nが5以上であれば成り立つか、Nが3のときには成り立たないことを示した。

シンプレクティック群の場合に証明は、可換な二つの対称行列の組 [B1, B2] = 0 のなす空間が、完全交叉である、というPanyushevによる結果に帰着することで行われた。このことから、(B1,B2) に対して、[B1,B2]という行列を対応させる運動量写像の他のファイバーの性質を導くことができ、欲しかった空間 M の性質を示すことができる。

一方、特殊直交群の場合には、可換な行列の組 [B1, B2] = 0 については、対応する性質は正しくないことが知られているので、この議論を使うことはできない。そこで、Kraft-Procesiによる、古典群の冪零軌道の研究のために用いられた、行列の組 (i,j)で ij=0 を満たすものについての分類を用いた。ただし、今の場合は、さらに j=i^* という条件が課されているが、Kraft-Procesiは、この場合も取り扱っている。N≧5で、インスタントン数が一番低い場合には、この空間を調べればいいことが分かり、主張が従う。N=3の場合は、空間 M を軌道空間に分けることができ、それぞれの軌道の次元を計算することによって、主張が従う。

（続紙 ２ ）

（論文審査の結果の要旨）

K理論ネクラソフ分配関数は、理論物理学のゲージ理論において、近年活発に研究されている対象であり、可積分系との深い関係があり、またA型のときは弦理論を用いて研究するアプローチも行われている。また、同じくA型のときは数学的に厳密な取り扱いができることから、多くの数学者の研究がある。この数学的な基礎づけにより、分配関数は、さまざまな方法で精密に計算することができ、物理的な直感から予想されることを、数学的に厳密に示すことが可能になる、など数学と物理の双方が交流しつつ研究が進んでいる、重要な研究対象である。

しかし、ゲージ群を一般のコンパクトなリー群に変えると、弦理論のアプローチが使えるかはよくわからず、また数学的にもtorsion free層のモジュライ空間に取り換えるというテクニックを使うことができないために、数学的に厳密な取り扱いは、これまでそれほどなされていなかった。

要旨に紹介した、Nekrasov-Shadchinの行列表示式は、式自身は数学的に厳密に定義されるものであり、かつ原理的には計算可能なものである。（ただし、インスタントン数が多くなるに従い、行列のサイズが大きくなるために、計算量が多くなり、コンピュータを用いたとしても実際に求めることができるのは、インスタントン数が小さい場合だけである。） したがって、物理学者は、この表示式を、分配関数の定義として採用し、研究を行ってきた。しかし、要旨に述べたとおり、この表示式が、本来分配関数と考えるべき、モジュライ空間の座標環の指標と一致することは、明らかではなく、これらの関係をはっきりさせることは、数学的に重要な問題であり、もしも両者が異なるとすれば、物理的にも意味があると考えられる。

本論文では、この問題を扱い、シンプレクティック群 Sp(N/2) の場合に、両者が一致することを一般のインスタントン数の場合に示し、特殊直交群 SO(N) の場合には、インスタントン数が1と一番低い場合に、Nが5以上では正しいが、N=3では正しくないことを示した。シンプレクティック群の場合には、物理学者の期待が正しかったことが保証されたが、特殊直交群の場合には、問題は微妙であり、一般には成り立たない可能性が示唆されたことになる。

この主結果の証明のために、Kraft-Procesiによる分類結果や、Panyushevの理論といった、表現論の中でなされた研究を引用したことは、モジュライ空間を表現論の対象として扱うべきである、という近年の流れの中でも自然なことと考えられる。また、これらの結果に帰着させるために、行列の４つ組の空間を二つに分けて、ファイバー積としてとらえる手法は、一般的に用いることができると考えられ、応用範囲は広いと考えられる。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、平成27年１月26日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日：　　　　年　　　月　　　日以降